A PROPOS DU TRI

by

A. HOCQUENGHEM

University of North Carolina

Institute of Statistics Mimeo Series No. 484.5

August 1966

This research was supported by the Air Force office of Scientific Research Contract No. AF-AFOSR-760-65.

DEPARTMENT OF STATISTICS

UNIVERSITY OF NORTH CAROLINA

Chapel Hill, N. C.

1. INTRODUCTION

Trier une suite (A) de N nombres

$$(A) \qquad a_1, a_2, \dots , a_N$$

c'est ranger ces nombres par ordre de grandeur soit croissante, soit décroissante, en vue d'obtenir une séquence monotone.

Dans un but de simplification, nous supposerons tous les nombres différents. Dans ce cas, on peut considérer que les nombres a_i sont les nombres entiers do 1 à N et trier la suite revient a determiner l' inverse de la permutation.

$$1, 2, \dots , N$$

$$a_1, a_2, \dots, a_N$$

2.1 DESCRIPTION D'UN ALGORITHME D'EXTRACTION DE SEQUENCES CROISSANTES

Considérons la suite A et posons $a_1 = a_1^1$. Comparons a_2 à a_1^1:

si $a_2 > a_1^1$, nous poserons $a_2 = a_1^2$

si $a_2 < a_1^1$, nous poserons $a_2 = a_2^1$.

D'une façon générale, supposons que, ayant appliqué l'algorithme à la suite $a_1, a_2, \dots, a_p$, nous ayons obtenu les k séquences croissantes,

$$a_1^1 , a_1^2, \dots, a_1^{h_1}$$

$$a_2^1,\ a_2^2, \ldots,\ a_2^{h_2}$$

$\cdot$

$\cdot$

$\cdot$

$$a_k^1,\ a_k^2, \ldots,\ a_k^{h_k}$$

Pour placer a_{p+1}, nous le comparons aux nombres terminaux de chaque séquence:

si $a_{p+1} > a_1^{h_1}$, nous poserons $a_{p+1} = a_1^{1+h_1}$

si $a_i^{h_i} < a_{p+1} < a_{i-1}^{h_{i-1}}$, nous poserons $a_{p+1} = a_i^{1+h_i}$ $(i = 2,3,\ldots,k)$

si $a_{p+1} < a_k^{h_k}$, nous poserons $a_{p+1} = a_{k+1}^1$

En bref, nous plaçons a_{p+1} a l'extrémité de la séquence de plus bas indice qui peut l'admettre et si cela est impossible a_{p+1} commencera une nouvelle séquence.

En ayant placé tous les éléments de la suite A, nous obtiendrons l'ensemble de séquences croissantes

$$C \left\{ \begin{array}{l} a_1^1,\ a_1^2, \ldots,\ a_1^{m_1} \\ a_2^1, \ldots\ldots\ldots,\ a_2^{m_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n^1, \ldots\ldots\ldots,\ a_n^{m_n} \end{array} \right.$$

possédant les propriétés suivantes : tous les nombres de A sont placés, tout nombre a_i^j est un nombre placé dans la suite A , avant le nombre a_i^{j+1} et après le nombre a_i^{j-1} . En outre, le plus petit majorant de a_i^j appartenant à la $(i-1)^{ème}$ ligne est placé avant a_i^j dans la suite A.

(Exemple : (suite) 0-7-2-15-6-20-16- 17-1-12-4-14-8-5-13-19-21-9-11-3-18-10
(
(L'application de l'alogorithme conduit au tableau suivant :
(
(0-7-15-20-21
(2-6-16-17-19
(1-12-14-18
(4-8-13
(5-9-11
(3-10
(
(et, par exemple, dans la suite A , 14 est placé avant 18 , après 14 et
(
(après 16 (le plus petit majorant de 14 dans la ligne précédente).
(
(

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

<u>La plus longue séquence décroissante que l'on puisse extraire de la suite A contient exactement n nombres (1).</u>

En effet, soit $a_n^{j_n}$ un élément de la dernière ligne, soit $a_{n-1}^{j_{n-1}}$ son plus petit majorant dans la $(n-1)^{ième}$ ligne, soit $a_{n-2}^{j_{n-2}}$ le plus petit majorant de $a_{n-1}^{j_{n-1}}$ dans la $(n-2)^{ième}$ ligne, etc... et soit $a_1^{j_1}$ le plus petit majorant de $a_2^{j_2}$ dans la première ligne. La séquence

$$a_1^{j_1}, a_2^{j_2}, \ldots, a_{n-1}^{j_{n-1}}, a_n^{j_n}$$

est une séquence décroissante extraite de la suite A.

Il ne peut y avoir une séquence décroissante extraite de A et comprenant plus de n termes, car une telle séquence ne peut avoir que 0 ou 1 élément commun avec chaque ligne du tableau C

(Exemple : en remontant les lignes du tableau de l'exemple précédent, à partir, soit de l'élément 3 , soit de l'élément 10 , on trouve les séquences

20-16-12-8-5-3 et 20-16-14-13-11-10

Il peut y avoir d'autres séquences décroissantes de longueur 6 , mais il n'existe pas de séquence décroissante plus longue.

On déduit du théorème précédent le corollaire suivant :

Il n'existe pas de partition de la suite A en séquences croissantes qui contienne moins de n séquences.

En effet, dans l'hypothèse contraire, une séquence décroissante de longuer n aurait donc au moins 2 éléments communs avec une séquence de la partition, ce qui est manifestement absurde.

L'algorithme donné conduit donc à une partition minimale de la suite A en séquences croissantes.

2.2 REMARQUES DIVERSES

2.2.1) Il peut exister d'autres partitions minimales de la suite A .

Exemple : le même exemple admet comme partition en 6 séquences croissantes

0-1-3-10
4-5-9-11-18
6-8-13-19-21

7-12-14
16-17
2-15-20

2.2.2) Le même algorithme permet d'effectuer une partition minimale de A en séquences décroissantes dont le nombre n'est celui de la plus longue séquence croissante extraite de A .

(Example : le même exemple conduit au tableau de séquences décroissantes
(
(0
(7-2-1
(15-6-4-3
(20-16-12-8-5
(17-14-13-9
(19-11-10
(21-18
(
(et à la séquence croissante de longueur maximum
(
(0-7-15-16-17-19-21
(ou
(0-2-6-8-9-11-18

2.2.3) Il est bon de remarquer qu'extraire de la suite A la plus longue séquence croissante ne conduit pas nécessairement à une partition minimale.

(Exemple : la suite 4-1-2-5-6-3-7-8-9-11-10 admet la partition minimale
(
(4-5-6-7-8-9-11 et 1-2-3-10
(
(tandis que si l'on extrait d'abord la plus longue séquence croissante
(
(1-2-5-6-7-8-9-11
(
(il reste la suite 4-3-10 qui se partage encore en deux séquences
(croissantes 4-10 et 3.

2.2.4) Toutes les séquences croissantes du tableau C contiennent au plus n' éléments (longueur de la plus longue suite croissante).

Par suite

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n \leq n.n' \qquad \text{ou} \qquad N \leq nn'$$

D'autre part, si nous extrayons de la suite A la plus longue suite croissante, il reste une suite A' contenant (N-n') nombres et dont la partition en séquences croissantes donnera au moins (n-1) séquences. Donc

$$N-n' \geq n-1 \qquad \text{ou} \qquad N+1 \geq n+n' .$$

Inversement, si trois nombres entiers N,n,n' satisfont aux deux inégalités précédentes, it est aisé de construire une suite A de N nombres admettant une partition minimale en n **suites croissantes** et une partition minimale en n' suite décroissantes. En effet, choisissons une suite de nombres entiers croissants

$$0 = b_o < b_1 < b_2 \ldots < b_i \ldots < b_{n-1} = N-n' < b_n = N$$

et tels que $1 \leq b_{i+1} - b_i \leq n'$ si $i = 0,1,2,\ldots,n-2$.

Ceci est possible puisque :

$$1 \leq \frac{b_{n-1}}{n-1} \leq n'$$

d'après les inégalitiés initiales.

On voit aisément que la suite

$$1+b_{n-1}, 2+b_{n-1}, \ldots, b_n \ , \ 1+b_{n-2}, 2+b_{n-2}, \ldots b_{n-1}, \ 1+b_{n-3}, \ldots, b_2,$$

$$1,2,3,\ldots, \ b_1$$

satisfait aux conditions imposées.

2.3. PARTITION D'UNE SUITE A EN SEQUENCES MONOTONES

Nous nous proposons maintenant d'établir un résultat concernant la partition d'une suite A en séquences monotones (dont les unes seront croissantes et les autres décroissantes).

Pour cela nous poserons $g(x) = \frac{x(x+3)}{2}$ et nous énoncerons le théorème :

<u>Si p désigne le plus petit entier tel que $N \leq g(p)$, il existe ensuite une partition de la suite A contenant au plus p séquences monotones.</u>

Le résultat est évident si $p = 1$, $g(p) = 2$, $N = 1$ ou 2 .

Démontrons le résultat par récurrence : pour cela faisons une partition minimale de A , en séquences croissantes ; si le nombre n de ces séquences est, au plus, égal à p , le résultat est établi ; si par contre, n est supérieur à p , nous pourrons extraire de A une séquence décroissante de longueur n et il restera une suite A_1 . Le nombre de termes de la suite A_1 est :

$$N_1 = N-n \leq N-p-1 \leq g(p) - (p+1) = g(p-1)$$

Ce qui montre que le raisonnement par récurrence s'applique.

Il est facil de vérifier qu'il existe des suites n'admettant pas de partition en moins de p séquences. Il suffit pour cela de généraliser les suites suivantes correspondant au cas p=3 et p=4

8-9-3-2-1-4-5-6-7

14-15-3-2-1-10-11-12-13-9-8-7-6-5-

Mais nous n'avons pu construire d'algorithme permettant de faire la partition minimale d'une suite A en séquences monotones.

------

(1) CHENON - Mathématiques Sociales et Sciences Bancaires - n°5 - Janvier 1964.